第6講　複素数平面

6 ［A］ 方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け.

［B］ A(i), B(2) とする. 第1象限の3点 P(z), Q(w), R に対して, 三角形 ABP は正三角形, 四角形 ABQR は正方形であるという. z と w の求めよ.

［C］ $z_0=3$, $z_{n+1}=(1+i)z_n-2i$ ($n=0$, 1, 2, …) で定められる $\{z_n\}$ に対して, z_n が純虚数となる自然数 n を求めよ.

第６講　複素数平面

6 ［A］ 方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け．

［B］ A(i)，B(2) とする．第１象限の３点 P(z)，Q(w)，R に対して，三角形 ABP は正三角形，四角形 ABQR は正方形であるという．z と w の求めよ．

［C］ $z_0=3$，$z_{n+1}=(1+i)z_n-2i$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる $\{z_n\}$ に対して，z_n が純虚数となる自然数 n を求めよ．

【答】 ［A］ $\pm(\sqrt{3}+i)$，$\pm(-1+\sqrt{3}\,i)$　　［B］ $z=\dfrac{(2+\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i}{2}$，$w=3+2i$　　［C］ 3

【解説】 ［A］ $z\neq0$ より，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ と表せる．このとき

$z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$ であり $-8+8\sqrt{3}\,i=16\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$ なので

$r^4=16$ かつ $4\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$　$\therefore$ $r=2$ かつ $\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k}{2}\pi$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

よって $z=\pm(\sqrt{3}+i)$，$\pm(-1+\sqrt{3}\,i)$．

［B］ 三角形 ABP は正三角形なので

$$\frac{z-i}{2-i}=1\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\iff z=\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\times i+\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\times2$$

$$\therefore\quad z=\frac{(2+\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i}{2}$$

また，四角形 ABQR は正方形なので

$$\frac{w-i}{2-i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\iff w=(-i)\times i+(1+i)\times2$$

$$\therefore\quad w=3+2i$$

［C］ $z_0=3$，$z_{n+1}=(1+i)z_n-2i\iff z_{n+1}-2=(1+i)(z_n-2)$ より

$z_n-2=(z_0-2)(1+i)^n$ となるので，$z_0=3$ より $z_n-2=(3-2)(1+i)^n$ つまり

$z_n=2+(1+i)^n$．

ここで，$(1+i)^n=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi+i\sin\dfrac{n}{4}\pi\right)$ より

$$z_n=2+(\sqrt{2})^n\cos\frac{n}{4}\pi+\left\{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n}{4}\pi\right\}i$$

となるので，z_n が純虚数となる条件は

$$2+(\sqrt{2})^n\cos\frac{n}{4}\pi=0\quad\cdots①\quad かつ\quad(\sqrt{2})^n\sin\frac{n}{4}\pi\neq0\quad\cdots②$$

①より $\cos\dfrac{n}{4}\pi=-\dfrac{2}{(\sqrt{2})^n}$ なので $\cos\dfrac{n}{4}\pi<0$ であり，②より $\sin\dfrac{n}{4}\pi\neq0$ なので，これらを満たす自然数は $n=3,\ 5,\ 11,\ 13,\ 19,\ 21,\ \cdots$ である．

このとき $\cos\dfrac{n}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるが，$n=5,\ 11,\ 13,\ 19,\ 21,\ \cdots$ のとき

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < -\dfrac{2}{(\sqrt{2})^n} < 0$ なので，①を満たさない.

　また $n=3$ は①と②を満たすことより，求める n は $n=3$.